10/5/2018

Πρόταση: Έστω (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) 2 μ.χ. και ρ μια μετρική στο $X = X_1 \times X_2$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα: $\forall$ ακολουθία $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $X_1 \times X_2$ και κάθε $(x,y) \in X_1 \times X_2$:

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x,y) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\rho_1} x \text{ και } y_n \xrightarrow{\rho_2} y$$

[Μια τέτοια μετρική λέγεται μετρική γινόμενο]

Αν οι (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) είναι συμπαγείς τότε ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσω την ακολουθιακή συμπάγεια (που όπως έχουμε δείξει είναι ισοδύναμη με τη συμπάγεια) στον $X_1 \times X_2$.

Έστω $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $X_1 \times X_2$.

Εφόσον η (x_n) είναι μια ακολουθία στον συμπαγή χώρο X_1, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in X_1$ ώστε

$x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ (1)

Η (y_{k_n}) είναι μια ακολουθία στον συμπαγή χώρο X_2, άρα υπάρχει υπακολουθία $(y_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $y \in X_2$ ώστε

$y_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho} y$ (2)

Εφόσον η $(x_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$

(1) $\Rightarrow x_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho_1} x$ (3)

(2), (3) $\overset{\text{υπόθεση}}{\Rightarrow} (x_{k_{\lambda_n}}, y_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{\rho} (x,y)$

Επομένως ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ είναι συμπαγής.

Παρατήρηση: Το ίδιο συμπέρασμα γενικεύεται ως εξής: Αν $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ είναι συμπαγείς μ.χ. και ρ μια μετρική γινόμενο $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ τότε ο (X, ρ) είναι συμπαγής

(1)

Πόρισμα: Σε έναν ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$ τα σύνολα της μορφής: $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$ είναι συμπαγή.

Θεώρημα: Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο. (στο $\mathbb{R}^k$ θεωρούμε όπως πάντα των ευκλείδεια μετρική.)

Απόδειξη: Αν K είναι συμπαγές, τότε το K κλειστό και φραγμένο (αυτή η κατεύθυνση ισχύει γενικά).

Αντίστροφα, έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Εφόσον το K φραγμένο $(\exists M > 0): K \subseteq B_\rho(0, M)$

Άρα $K \subseteq \underbrace{[-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M]}_{k\text{-φορές}}$

Το τελευταίο σύνολο είναι συμπαγές, εφόσον το K είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, άρα συμπαγές.

Θεώρημα (Λήμμα Lebesgue): Έστω (X, ρ) συμπαγής μ.χ. και $(G_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall A \subseteq X$ με $diam(A) < \delta$ $\exists i \in I$ ώστε $A \subseteq G_i$.

Απόδειξη: Εφόσον $X = \bigcup_{i \in I} G_i$, $\forall x \in X$ $\exists i_x \in I$ ώστε $x \in G_{i_x}$ και εφόσον G_{i_x} ανοικτό, $\exists$ ~~δ~~ $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon_x) \subseteq G_{i_x}$.

Η οικογένεια $(B_\rho(x, \frac{\varepsilon_x}{2}))$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής $\exists n \in \mathbb{N}$: $x_1, \dots, x_n \in X$ και $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(x_k, \frac{\varepsilon_{x_k}}{2})$. Θέτουμε $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon_{x_k}}{2}, k = 1, \dots, n\right\} > 0$. Έστω τώρα $A \subseteq X$ με $diam(A) < \delta$ επιλέγουμε τυχαίο $a \in A$.

ότι

Τότε υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω: $a \in B_p(x_k, \frac{\varepsilon x_k}{2})$, δηλ.

$p(a, x_k) < \frac{\varepsilon x_k}{2}$

Τότε ισχύει ότι $A \subseteq G_{i x_k}$

[Απόδ: Πράγματι, αν $y \in A$ τότε $p(y, x_k) \leq p(y, a) + p(a, x_k) <$
$\delta + \frac{\varepsilon x_k}{2} \leq \frac{\varepsilon x_k}{2} + \frac{\varepsilon x_k}{2} = \varepsilon x_k$

Άρα $y \in B_p(x_k, \varepsilon x_k) \subseteq G_{i x_k}$

Συνεπώς, $A \subseteq G_{i x_k}$]

Θεώρημα: Έστω (X, p) συμπαγής μ.χ., (Y, d) μ.χ και $f: X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: (1η απόδειξη) (Με το λήμμα Lebesgue)

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής $\forall x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε

$f(B_p(x, \delta_x)) \subseteq B_d(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$

Η οικογένεια $(B_p(x, \delta_x))_{x \in X}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου X, άρα από λήμμα Lebesgue $\exists \delta > 0$, ώστε $\forall A \subseteq X$ με $diam(A) < \delta$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $A \subseteq B_p(x, \delta_x)$.

Έστω $a, b \in X$ με $p(a, b) < \delta$. Τότε για το $A = \{a, b\}$ έχουμε $diam(A) < \delta$ άρα $\exists x \in X$: $a, b \in B_p(x, \delta_x)$

Τότε $d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $d(f(x), f(b)) < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα $d(f(a), f(b)) \leq d(f(a), f(x)) + d(f(x), f(b)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

$2^{η}$ απόδειξη: (Με χρήση ακολουθιών)

Αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε $\exists \varepsilon > 0$ και 2 ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X ώστε $p(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ $(\forall n)$

$\wedge$ $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{p} x$ (1)

Αφού $p(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ τότε $p(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow p(x_{k_n}, y_{k_n}) \to 0$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $y_{k_n} \xrightarrow{p} x$ (3)

Από (1), (3) $\xrightarrow[\text{στο } X]{f \text{ συνεχής}}$ $\left.\begin{array}{l} f(x_{k_n}) \xrightarrow{d} f(x) \\ f(y_{k_n}) \xrightarrow{d} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow d(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \to$

$d(f(x), f(x)) = 0$ άτοπο διότι $d(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \varepsilon$, $\forall n$.

Επομένως, η f είναι ομοιομ. συνεχής.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω (X,p), (Y,d) μ.χ. και $f: X \to Y$ συνεχής. Αν $K \subseteq X$ συμπαγής, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y (ισοδύναμα αν X συμπαγές, f συνεχής και επί, τότε το Y είναι συμπαγές)

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του Y με $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$

$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} G_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i)$ $\forall i \in I$, το $f^{-1}(G_i)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X (διότι f συνεχής και G_i ανοικτό στον Y). Εφόσον το K είναι συμπαγές $\exists J \subseteq I$, J πεπερασμένο ώστε $K \subseteq \bigcup_{i\in J} f^{-1}(G_i)$

Άρα $f(K) \subseteq f(\bigcup_{i\in J} f^{-1}(G_i)) = \bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(G_i)) \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$

Επομένως, το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα: Αν (X,ρ) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη: Το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι κλειστό και φραγμένο, άρα $\exists \min f(X), \max f(X)$, δηλ. $\exists x_0, y_0 \in X$ ώστε: $f(x_0) = \min\{f(x), x \in X\}$

$f(y_0) = \max\{f(x), x \in X\}$

Θεώρημα: Αν $(X,\rho), (Y,d)$ μ.χ.

(X,ρ) είναι και συμπαγής και έστω $f: X \to Y$ συνεχής, 1-1 και επί. Τότε η $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής (άρα η f είναι ομοιομορφισμός)

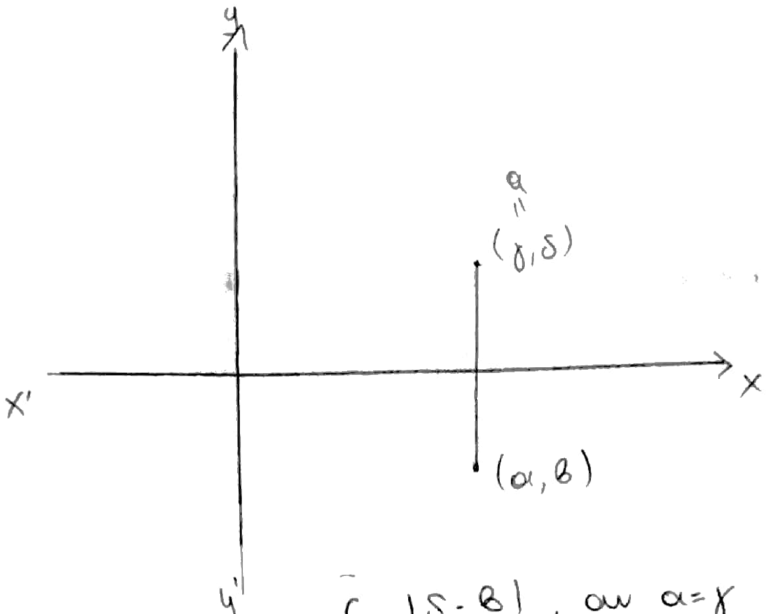
Απόδειξη: Από προηγούμενο θεώρημα το $Y = f(X)$ είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς)

Για ν.δ.ο. η $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής αρκεί ν.δ.ο. $\forall K \subseteq X$ κλειστό το $(f^{-1})^{-1}(K)$ είναι κλειστό. Έστω $K \subseteq X$ κλειστό.

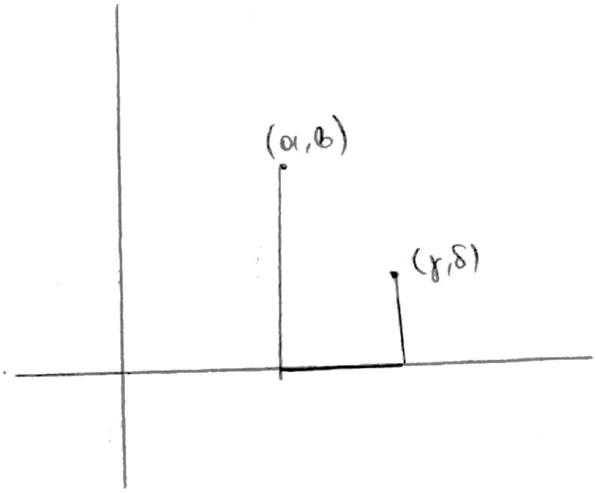
Το K είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς)

Εφόσον η f είναι συνεχής, το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, άρα το $f(K)$ είναι κλειστό το Y, δηλ. $(f^{-1})(K)$ είναι κλειστό στον Y. Επομένως η f^{-1} είναι συνεχής.

Φυλλάδιο #3, άσκ. 8



$$d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = \begin{cases} |\delta-\beta|, & \text{αν } \alpha=\gamma \\ |\beta| + |\gamma-\alpha| + |\delta|, & \text{αν } \alpha\neq\gamma \end{cases}$$



α) d μετρική

→ $d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) \geq 0$

$d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = 0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$

→ $d((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)) = d((\gamma,\delta),(\alpha,\beta))$ εύκολα

→ τριγωνική: Έστω $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta),(\varepsilon,\zeta) \in \mathbb{R}^2$

(i) $\alpha=\gamma=\varepsilon$

(ii) $\alpha=\gamma\neq\varepsilon$

(iii) $\alpha\neq\gamma=\varepsilon$

(iv) $\alpha=\varepsilon\neq\gamma$

(v) $\alpha\neq\gamma\neq\varepsilon\neq\alpha$

γ) $(x, y+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα

Θ.δ.ο. $(x, y+\frac{1}{n}) \xrightarrow{d} (x,y)$

$d\left((x,y+\frac{1}{n}),(x,y)\right) = |y-(y+\frac{1}{n})| = \frac{1}{n} \to 0$

άρα $(x, y+\frac{1}{n}) \xrightarrow{d} (x,y)$

δ) $(x+\frac{1}{n}, y)_{n\in\mathbb{N}}$

<u>1η περίπτωση</u>: $y=0$. Θ.δ.ο: $(x+\frac{1}{n},0) \xrightarrow{d} (x,0)$

$d((x+\frac{1}{n},0),(x,0)) = |0| + |x-(x+\frac{1}{n})| + 0 = \frac{1}{n} \to 0$

<u>2η περίπτωση</u>: $y \neq 0$

Θ.δ.ο. η $(x+\frac{1}{n}, y)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι βασική (συνεπώς δε θα είναι συγκλίνουσα)

Για $n \neq m$ $\quad d\left((x+\frac{1}{n},y),(x+\frac{1}{m},y)\right) = |y| + |(x+\frac{1}{n})-(x+\frac{1}{m})| + |y| > 2|y|$

άρα δεν είναι βασική, άρα δεν είναι συγκλίνουσα

ε) Δείχνουμε ότι η $g:(\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R}^2,d)$
$g(x,y)=(y,x)$ δεν είναι συνεχής

Έχουμε $(1, 1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{d} (1,1)$ (σύμφωνα με το γ)

ενώ $g(1,1+\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n},1) \not\xrightarrow{d} (1,1) = g(1,1)$

πράγματι (σύμφωνα με το δ)

Άρα από (αρχή μεταφοράς) η g δεν είναι συνεχής.

6τ) <u>1η περίπτωση:</u> $y=0$

$(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,0) \Leftrightarrow x_n \to x$ και $y_n \to 0$

$$\forall n \in \mathbb{N} : d((x_n,y_n),(x,0)) = \begin{cases} \xrightarrow{x_n = x} |y_n - 0| \\ \xrightarrow{x_n \neq x} |0| + |x_n - x| + |y_n| \leq |x_n - x| + |y_n| \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Αν $x_n \to x$ και $y_n \to 0$ $\leq |x_n - x| + |y_n|$

Τότε $d((x_n,y_n),(x,0)) \leq \underset{\downarrow \atop 0}{|x_n - x|} + \underset{\downarrow \atop 0}{|y_n|} \to 0$

($\Rightarrow$) Αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,0)$
$d((x_n,y_n),(x,0)) \to 0$

Τότε $|y_n| \leq d((x_n,y_n),(x,0)) \to 0$

άρα $|y_n| \to 0 \Rightarrow y_n \to 0$

Αν $x_n \not\to x$ θα υπάρχε $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (x_{k_n})
της (x_n) ώστε $|x_{k_n} - x| \geq \varepsilon \ \forall n$

άρα $d((x_{k_n}, y_{k_n}), (x,0)) \geq |x_{k_n} - x| \geq \varepsilon \ \forall n$, άτοπο

Άρα $x_n \to x$

<u>2η περίπτωση:</u> $y \neq 0$

Θ.Δ.Ο. $x_n, y_n \to (x,y)$ αν-ν $\begin{cases} (x_n) \text{ είναι τελικά σταθ. και} \\ \text{ίση με } x \text{ και } y_n \to y \end{cases}$

($\Leftarrow$) Αν $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x$, $\forall n \geq n_1$ τότε για κάθε $n \geq n_1$
$d((x_n,y_n),(x,y)) = |y_n - y| \to 0$ άρα $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

($\Rightarrow$) Αν η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή ίση με x
τότε $\exists k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ ώστε $x_{k_n} \neq x$, $\forall n$
$d((x_{k_n}, y_{k_n}), (x,y)) = |y| + |x_{k_n} - x| + |y_{k_n}| \geq |y|$
άρα η $d((x_n, y_n)) \not\xrightarrow{d} (x,y)$

1) Δείχνουμε ότι η $p : (\mathbb{R}^2, d) \to \mathbb{R}$

$p(x,y) = x$ είναι συνεχής (με χρήση αρχή μεταφοράς)

Αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

<u>1η περίπτωση:</u> αν $y=0$ τότε $x_n \to x$

δηλ. $p(x_n, y_n) \to p(x,y)$

<u>2η περίπτωση:</u> αν $y \neq 0$ τότε η x_n τελικά σταθερή και ίση

με x άρα $x_n \to x$

άρα $p(x_n, y_n) \to p(x,y)$. Άρα αποδ. ότι η p είναι συνεχής

Η $Q : \mathbb{R}^2, d) \to \mathbb{R}$, $Q(x,y) - y$ είναι συνεχής

Πράγματι, $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$, τότε απ' το προηγούμενο

ερώτημα $y_n \to y$ $\quad Q(x_n, y_n) \to Q(x,y)$

η) Η ταυτοτική $I : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, p)$ είναι συνεχής

Πράγματι αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$

Τότε όπως είδαμε πριν $x_n \to x$ και $y_n \to y$

$\Rightarrow (x_n, y_n) \xrightarrow{p} (x,y)$ όπου p η ευκλ. μετρική

Η ταυτοτική $J : (\mathbb{R}, p) \to (\mathbb{R}^2, d)$ δεν είναι συνεχής.

Πράγματι $\left(1 + \frac{1}{n}, 1\right) \xrightarrow{p} (1,1)$

ενώ $\left(1 + \frac{1}{n}, 1\right) \not\xrightarrow{d} (1,1)$